Муниципальный этап ВсОШ 2025-2026 уч.г.
математика 10 класс задания
Работа рассчитана на 240 минут

1. Корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ – целые числа, отличные от нуля. Докажите, что число $p^2 + (q-1)^2$ составное.

Решение**.** Пусть a и b – корни данного уравнения. Тогда, используя теорему Виета, получим: $p^2 + (q-1)^2 = (a+b)^2 + (ab-1)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2b^2 - 2ab + 1 = (a^2+1) + (b^2 + a^2b^2) = (a^2+1)(b^2+1)$. Так как $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $a^2 + 1 \neq 1$ и $b^2 + 1 \neq 1$. Следовательно, число $p^2 + (q-1)^2$ составное.

Критерии проверки.

2 балла - приведено полное обоснованное решение;

1 балл - верно выполнено разложение на множители, но не объяснено, что они отличны от единицы;;

0 баллов - задача не решена или решена неверно.

2. Можно ли квадрат со стороной 8 полностью покрыть двумя кругами диаметра 9?

Ответ: можно.

Решение. Разделим квадрат на два равных прямоугольника размером 4×8.

Диагональ такого прямоугольника равна $\sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5} < 9$. Следовательно, каждый из полученных прямоугольников можно покрыть описанным около него кругом, диаметр которого равен длине диагонали прямоугольника. Значит, и кругом с диаметром 9 такой прямоугольник покрыть можно. Тогда данный квадрат можно покрыть двумя кругами диаметра 9.

Критерии проверки.

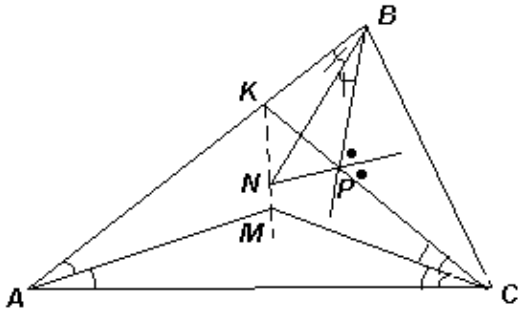
2 балла - приведено полное обоснованное решение;

1 балл - приведён чертеж разбиения данного квадрата на два прямоугольника и покрытия их равными кругами, но вычисления отсутствуют;

0 баллов - задача не решена или решена неверно.

3. Внутри треугольника *ABC* отмечена точка *P*. Биссектрисы углов *BAC* и *ACP* пересекаются в точке *M*, а биссектриса угла *PBA* и прямая, содержащая биссектрису угла *BPC* пересекаются в точке *N*. Докажите, что точка пересечения прямых *CP* и *AB* лежит на прямой *MN*.

Решение: Пусть прямые *CP* и *AB* пересекаются в точке *K* (см. рис.).



Тогда M – точка пересечения биссектрис треугольника AKC, следовательно, KM – биссектриса угла AKC.

Рассмотрим теперь треугольник KBP. N – точка пересечения биссектрисы внутреннего угла при вершине B и биссектрисы внешнего угла при P. Следовательно, точка N лежит и на биссектрисе внешнего угла при вершине K, то есть на биссектрисе угла AKC (N – центр вневписанной окружности треугольника KBP).

Таким образом, точки K, M и N лежат на прямой, содержащей биссектрису угла AKC.

Критерии проверки:

3 балла - приведено полное обоснованное решение;

2 балла - приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности;

1 балл - обосновано, что KM – биссектриса угла AKC, но дальнейших продвижений нет;

0 баллов - рассмотрен только какой-то частный случай;

0 баллов - задача не решена или решена неверно.

4. Выписаны все делители некоторого натурального числа, кроме единицы и его самого. Какие-то два числа из этого списка отличаются в шесть раз. А во сколько раз отличаются два самых больших числа из этого списка?

Ответ: в полтора раза

Решение. Пусть среди делителей числа N есть числа a и $6a$, тогда N делится на $6a$. Следовательно N делится на 2 и на 3, то есть 2 и 3 – два наименьших числа в списке. Тогда два наибольших числа в списке – это $\frac{N}{3}$ и $\frac{N}{2}$. Их отношение: $\frac{N}{2} \div \frac{N}{3} = \frac{3}{2}$..

Критерии проверки:

3 балла - приведено полное обоснованное решение;

2 балла - приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности;

1 балл - верный ответ получен, исходя из того, что 2 и 3 – наименьшие числа в списке делителей, но их присутствие в этом списке не доказано;

1 балл - верный ответ получен, исходя из рассмотрения конкретных примеров;

0 баллов - приведен только ответ;

0 баллов - приведено неверное решение или оно отсутствуе.т

5. Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел, удовлетворяющие условиям: $x^3 + y^3 = 1$ и $x^4 + y^4 = 1$.

Ответ: (0; 1); (1; 0).

Решение. Первый способ. Из второго равенства следует, что $|x| \le 1$ и $|y| \le 1$. При этом, для того, чтобы выполнялось первое равенство, необходимо, чтобы хотя бы одно из чисел x или y было положительным. Так как оба равенства симметричны

относительно переменных, то пусть $0 < x \le 1$. Тогда $0 < x^3 \le 1$, откуда $0 \le 1 - x^3 < 1$, то есть $0 \le y^3 < 1$, значит, $0 \le y < 1$.

Так как $0 < x \le 1$ и $0 \le y < 1$, то $x^4 \le x^3$ и $y^4 \le y^3$, причем оба равенства одновременно достигаются только при $x = 1$ и $y = 0$. Учитывая симметричное решение $x = 0$; $y = 1$,получим ответ.

Второй способ. Из условия задачи следует, что $x^4 - x^3 = -(y^4 - y^3)$. Рассмотрим функцию $f(t) = t^4 - t^3$, тогда уравнение примет вид $f(x) = -f(y)$.

Так как $t^4 - t^3 = t^3(t - 1)$, то при $t < 0$ или $t > 1$ $f(t) > 0$, а при $0 < t < 1$ $f(t) < 0$. Следовательно, если $x < 0$ или $x > 1$, то $0 < y < 1$. Если $x > 1$, то $x^4 > 1$ и $x^4 + y^4 > 1$. Если $x < 0$, то $x^3 < 0$, а так как $0 < y < 1$, то $0 < y^3 < 1$, тогда $x^3 + y^3 < 1$. В обоих случаях получено противоречие. Аналогичные рассуждения приводят к противоречию и в случае, когда $0 < x < 1$, $y < 0$ или $y > 1$.

Следовательно, $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ или $t = 1$. Подставив эти значения в исходные равенства вместо любой из переменных, получим ответ.

Критерии проверки:

3 балла - приведено полное обоснованное решение;

2 балла - приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, не учтен симметричный ответ);

1 балл - присутствуют верные идеи оценки значений переменных, но до конца решение не доведено;

0 баллов - приведен только ответ;

0 баллов - задача не решена или решена неверно.

6. 100 включённых и 100 выключенных фонариков случайным образом разложены по двум коробкам. У каждого фонарика есть кнопка, нажатие которой выключает горящий фонарик и зажигает выключенный. Ваши глаза завязаны, и Вы не можете видеть, горит ли фонарик. Но Вы можете перекладывать фонарики из коробки в коробку и нажимать на них кнопки. Придумайте способ добиться того, чтобы горящих фонариков в коробках было поровну.

Решение. Сначала переложим все фонарики в правую коробку, не трогая выключатели. Далее переложим из правой коробки в левую любые сто фонариков, переключая при этом каждый, и цель будет достигнута. Докажем это.

При перекладывании (с переключением) одного фонарика разность между количествами горящих фонариков справа и слева уменьшается на 1. Действительно, если мы взяли фонарик, который не горел, зажгли его и переложили налево, то справа количество горящих фонариков не изменилось, а слева оно увеличилось на 1. Если же мы взяли горящий фонарик, погасили его и переложили налево, то справа количество горящих уменьшилось на 1, а слева оно осталось прежним. В тот момент, когда все фонарики находились в правой коробке, рассматриваемая разность равна 100, значит, после ста перекладываний она станет равной нулю, что и требуется. Существуют и другие алгоритмы действий.

Критерии проверки:

3 балла - приведено полное обоснованное решение;

2 балла - приведен верный алгоритм, но его обоснование неполно (например, сказано, что разность горящих фонариков будет уменьшаться на 1, но не объяснено, почему;

1 балл - приведен только верный алгоритм без всяких объяснений;

0 баллов - задача не решена или решена неверно.